

T6: Oscilaciones no lineales

Prof.: Guiomar Ruiz López



*Introducción al Caos y a las Bifurcaciones
en sistemas dinámicos no lineales.*
E.U.I.T. Aeronáutica. U.P.M. Diciembre 2009.

Oscilador de van der Pol

Aparatos de radio/osciladores biológicos (ritmos circadianos):

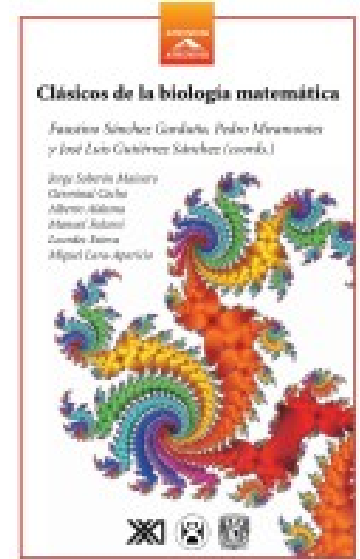
$$\ddot{x} + \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

- x es la posición
- ω es la frecuencia de oscilación
- El segundo término es un término de amortiguación no lineal ($\mu=0$: oscilador armónico.)

Experimenta:

Resulta instructivo observar el comportamiento del sistema para diferentes valores del parámetro μ .
¿Qué ocurre cuando $\mu > 0$? ¿Qué ocurre cuando $\mu = 0$? ¿Y cuando $\mu < 0$?
¿Qué forma tienen, en cada caso, las trayectorias en el espacio de fases?
Para valores de $\mu > 0$, pruebe con 0.5, inicia la simulación con diferentes valores de las condiciones iniciales.
¿Qué soluciones corresponden a que el origen sea un atractor? ¿y a que obtengamos un ciclo límite?

AYUDA: <http://www.euclides.dia.uned.es/simulab-pfp/Ejs33/Simulations/VanderPolSimulation.html>



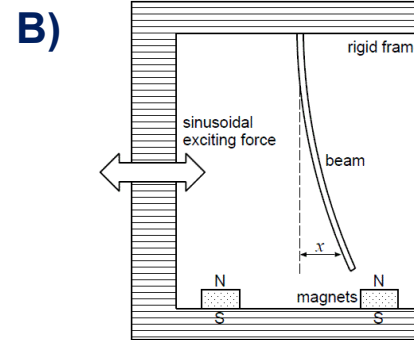
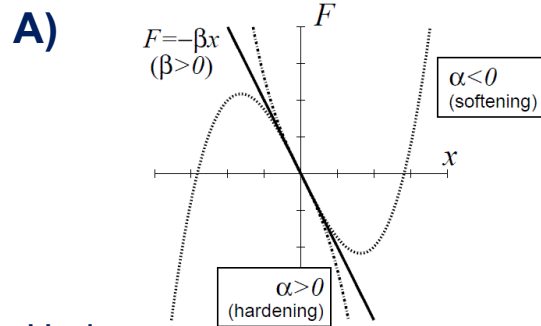
Clásicos de la Biología Matemática
F. Sánchez Garduño et. al.

Oscilador de Duffing

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + [\beta x + \alpha x^3] = A \cos \omega t$$

A) $\beta > 0$: Muelle con fuerza restauradora $F = -\beta x - \alpha x^3$, para $x \ll$

B) $\beta < 0$: Dinámica de masa puntual en potencial doble (modelo del experimento de Moon y Holmes (1979))



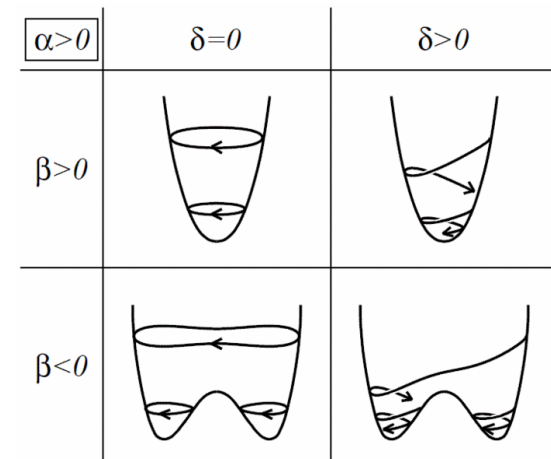
C) $\beta = 0$: Oscilador de Ueda

Sistema no forzado ($A=0$)

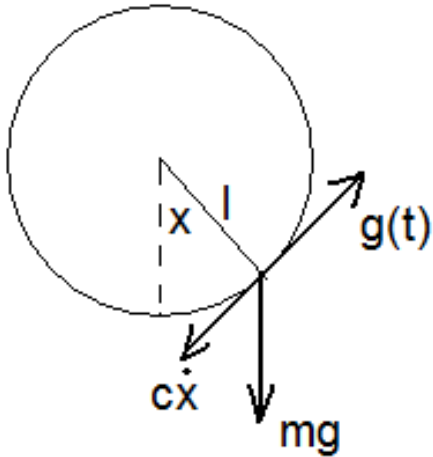
$$\delta = 0 \Rightarrow E(t) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \beta x^2 + \frac{1}{4} \alpha x^4 = cte$$

$$\delta > 0 \Rightarrow \frac{dE(t)}{dt} = \delta \dot{x}^2 \leq 0$$

Trayectorias en
($x, \dot{x}, E(t)$)



Péndulo forzado no lineal



$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{aceleración}} + \underbrace{c\dot{x}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{mg \sin x}_{\text{gravitación}} = \underbrace{g(t)}_{\text{término de fuerza}}$$

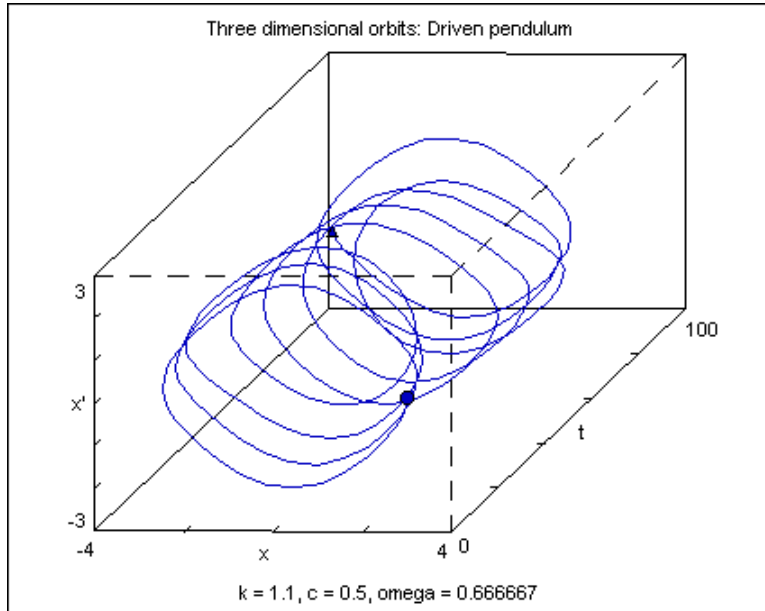
$$\Downarrow \begin{cases} t \rightarrow t\tau, \tau = l/g \\ g(t) = k \cos \Omega t \end{cases}$$

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \sin x = k \cos \Omega t$$

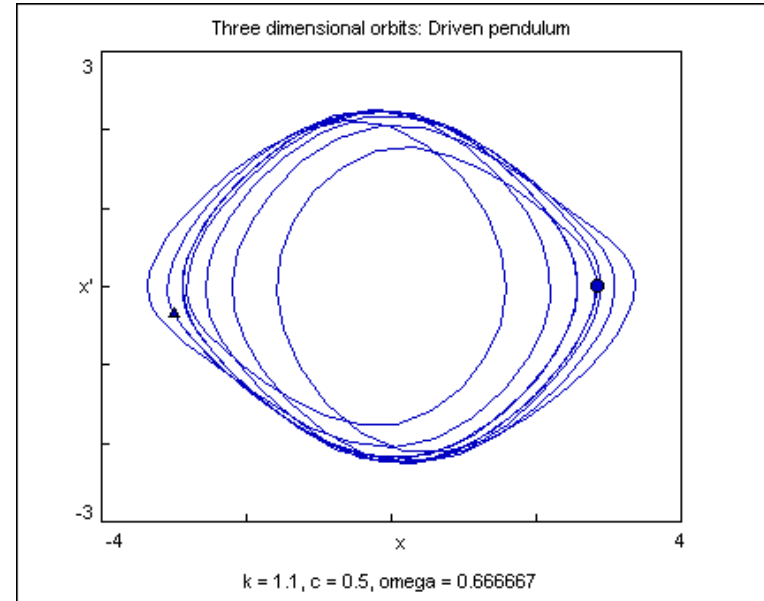
$$\begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{matrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - \sin x_1 + k \cos \Omega t \end{cases}$$

Trayectoria en espacio de estados:



Órbita en plano de fases:



Péndulo forzado no lineal

Aproximación lineal:

$$\underbrace{ml\ddot{x}}_{\text{aceleración}} + \underbrace{c\dot{x}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{mgx}_{\text{gravitación}} = \underbrace{g(t)}_{\text{término de fuerza}}$$

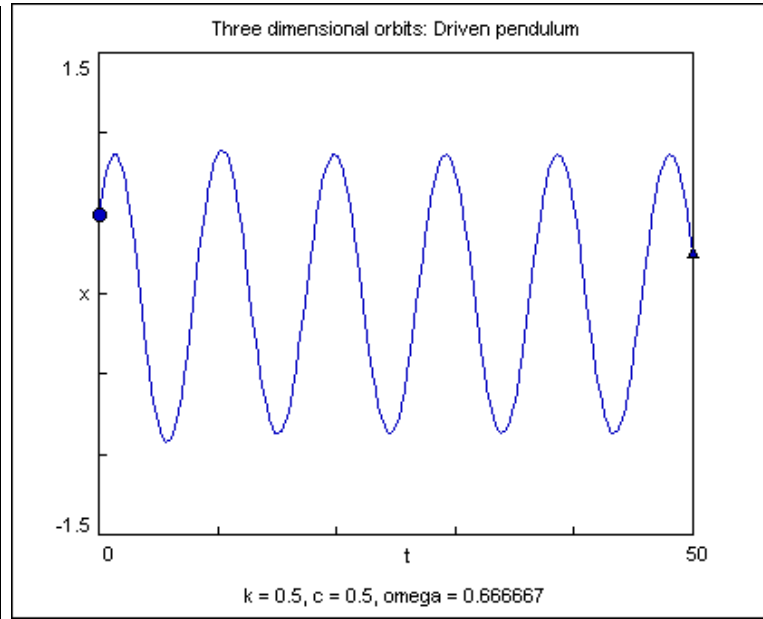
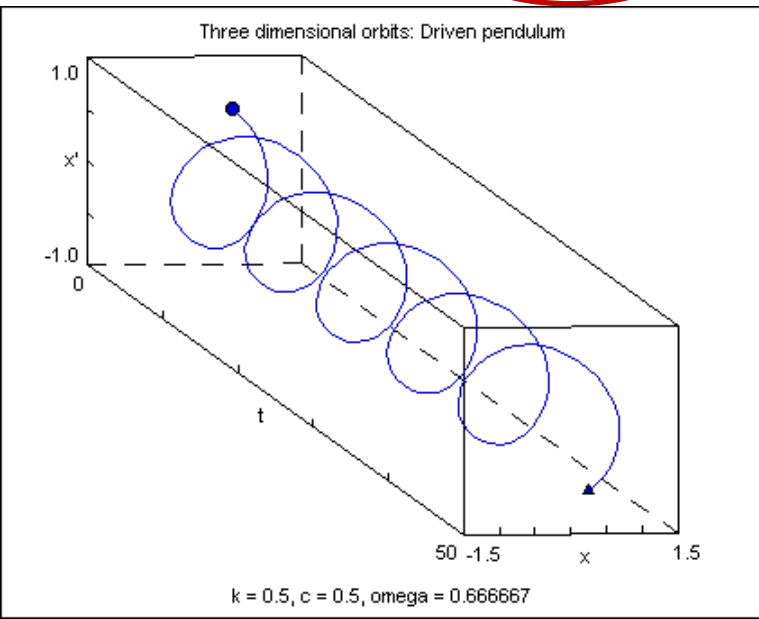
$$\Downarrow \begin{cases} t \rightarrow t\tau, \tau = l/g \\ g(t) = k \cos \Omega t \end{cases}$$

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x = k \cos \Omega t \quad \begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - x_1 + k \cos \Omega t \end{cases}$$

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \underbrace{A \cos(\Omega t + \delta)}_{\text{término estacionario}} + \underbrace{e^{-ct/2} [B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t]}_{\substack{(t \rightarrow \infty) \\ \rightarrow 0: \text{término transitorio}}}$$

: término estacionario
ATRACTOR PERIÓDICO

Atractor periódico (k <<):



EJERCICIO:
Utilizar la aplicación de rotación de las órbitas y su animación para afianzar la comprensión de cómo evolucionan en el tiempo.

Péndulo forzado no lineal

Aproximación lineal:

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{aceleración}} + \underbrace{c\dot{x}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{mgx}_{\text{gravitación}} = \underbrace{g(t)}_{\text{término de fuerza}}$$

$$\Downarrow \begin{cases} t \rightarrow t\tau, \tau = l/g \\ g(t) = k \cos \Omega t \end{cases}$$

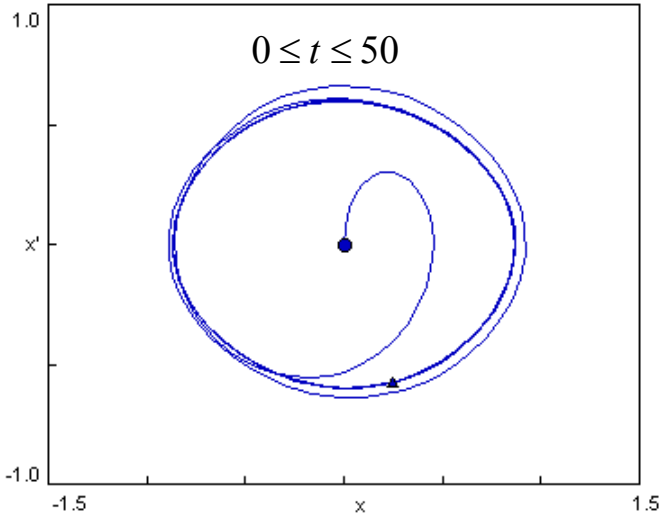
$$\ddot{x} + c\dot{x} + x = k \cos \Omega t \quad \begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - x_1 + k \cos \Omega t \end{cases}$$

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \underbrace{A \cos(\Omega t + \delta)}_{\text{término estacionario}} + \underbrace{e^{-ct/2} [B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t]}_{\substack{(t \rightarrow \infty) \\ \rightarrow 0: \text{término transitorio}}}$$

: término estacionario
ATRACTOR PERIÓDICO

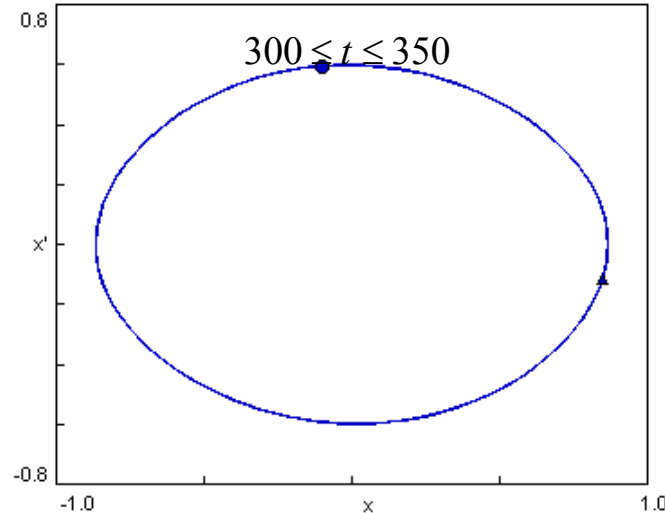
Atractor periódico (k <<):

Three dimensional orbits: Driven pendulum



k = 0.5, c = 0.5, omega = 0.666667

Three dimensional orbits: Driven pendulum



k = 0.5, c = 0.5, omega = 0.666667

EJERCICIO:
Probar diferentes c.i., y comprobar si el tractor periódico (k=0.5) atrae a todas las órbitas .

Péndulo forzado no lineal

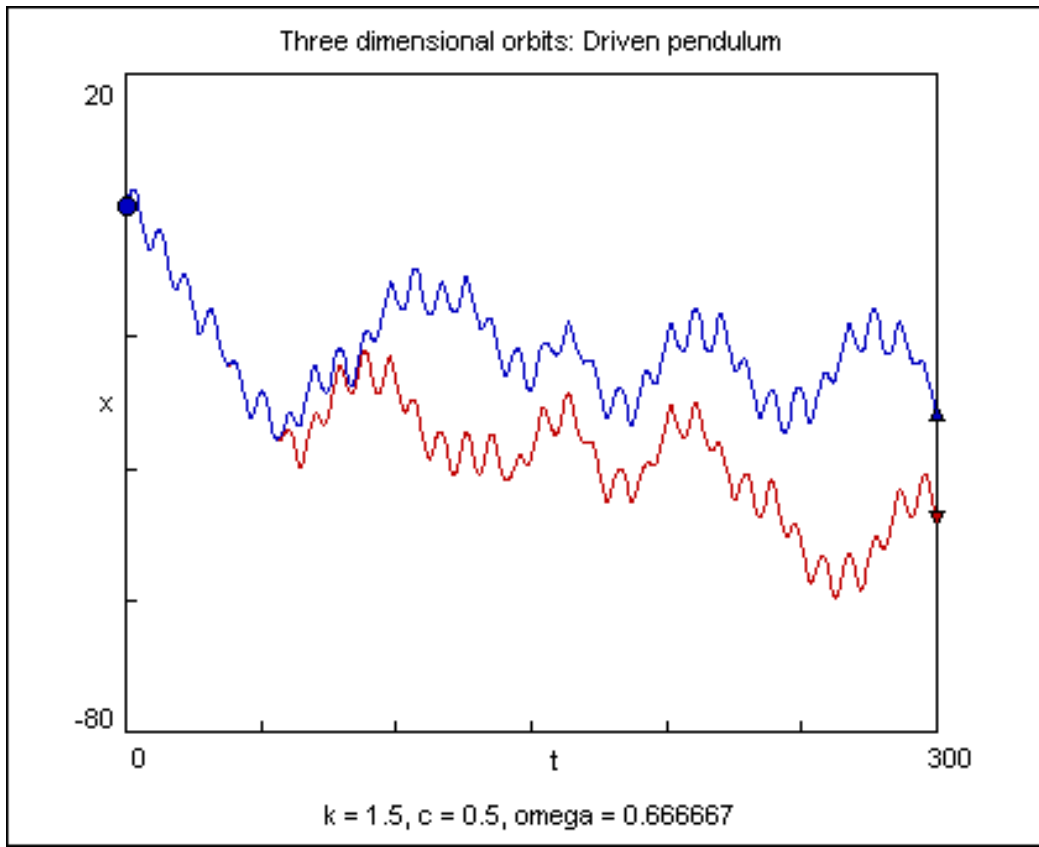
Aproximación lineal: NO!!
($k=1.5$)

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{aceleración}} + \underbrace{c\dot{x}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{mg \sin x}_{\text{gravitación}} = \underbrace{g(t)}_{\text{término de fuerza}}$$

$$\Downarrow \begin{cases} t \rightarrow t\tau, \tau = l/g \\ g(t) = k \cos \Omega t \end{cases}$$

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \sin x = k \cos \Omega t \quad \begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - \sin x_1 + k \cos \Omega t \end{cases}$$

Efecto mariposa ($k \gg$):



¿correlacionadas?

¿Atractor extraño?

Péndulo forzado no lineal

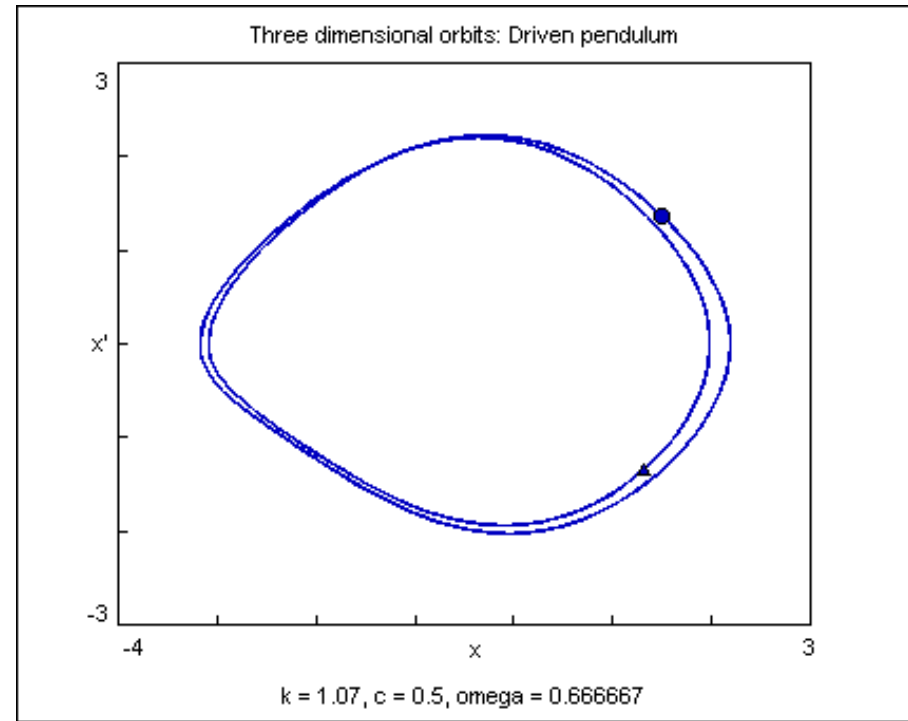
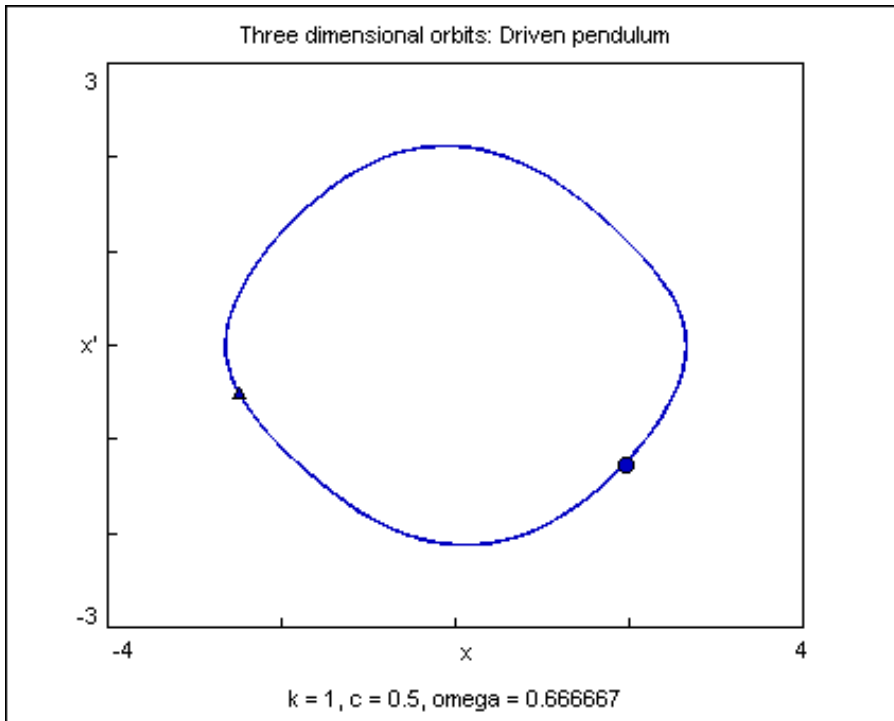
Aproximación lineal: NO!!
($k=1.5$)

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{aceleración}} + \underbrace{c\dot{x}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{mg \sin x}_{\text{gravitación}} = \underbrace{g(t)}_{\text{término de fuerza}}$$

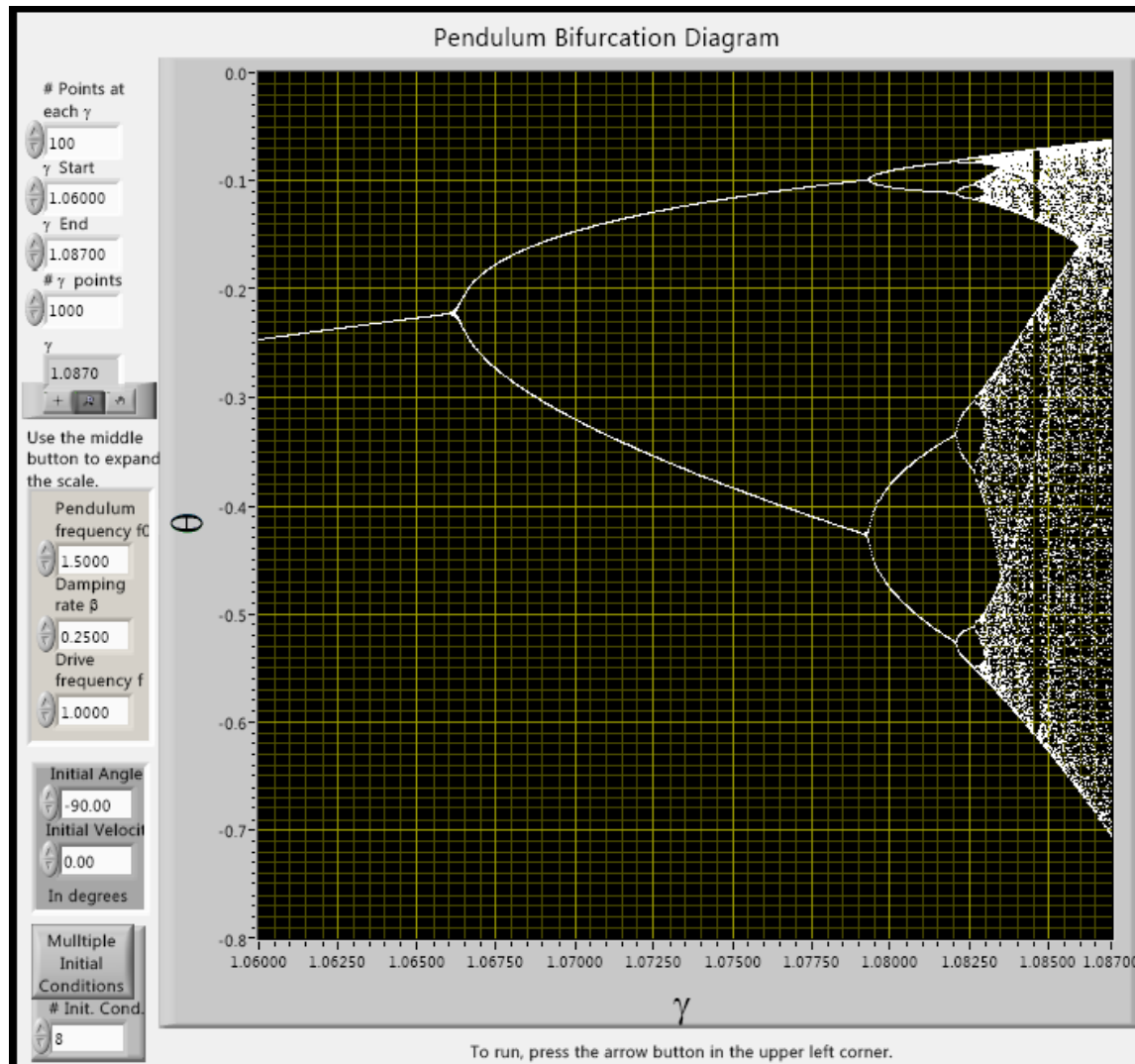
$$\Downarrow \begin{cases} t \rightarrow t\tau, \tau = l/g \\ g(t) = k \cos \Omega t \end{cases}$$

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \sin x = k \cos \Omega t \quad \begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - \sin x_1 + k \cos \Omega t \end{cases}$$

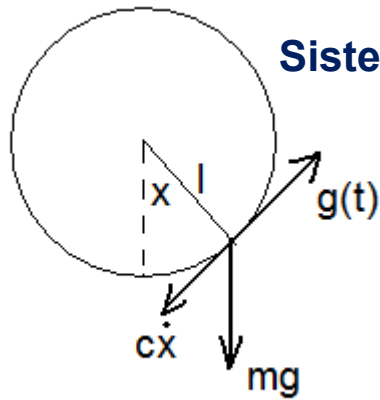
Desdoblamiento de periodo ($k \gg$):



Péndulo forzado no lineal



Ejercicios



Sistema dinámico:

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{aceleración}} + \underbrace{c\dot{x}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{mg \sin x}_{\text{gravitación}} = \underbrace{g(t)}_{\text{término de fuerza}}$$

$$\Downarrow \begin{cases} t \rightarrow t\tau, \tau = l/g \\ g(t) = k \cos \Omega t \end{cases}$$

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \sin x = k \cos \Omega t$$

$$\begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - \sin x_1 + k \cos \Omega t \end{cases}$$

EJERCICIO 1

Exploración de órbitas coexistentes en el péndulo forzado mediante ODE *Orbits window*:

- 1) Para $k=1.05$, mostrar dos órbitas en el plano de fases que comiencen en $(-2.2, 1.4)$ y $(-0.3, 2.0)$. Utilizar el intervalo temporal $94.247733 \approx 30\pi$ (aprox. 10 periodos del término de fuerza a la frecuencia $\Omega=2/3$.)
- 2) Utilizando la utilidad que calcula una nueva solución comenzando de la posición final previa, verificar que las dos soluciones no convergen al mismo atractor.
- 3) Disminuir el valor de k en incrementos de 0.01 hasta $k=1.01$. En cada paso, descartar el transitorio como en (i) antes de modificar k . Continuar por debajo de este valor, en incrementos menores, hasta $k=1.0$.

Osciladores no lineales

$$\ddot{x} + c\dot{x} + f(x) = k \cos \Omega t$$
$$f(x) = \alpha x + \beta x^3$$

Oscilador de Duffing

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = k \cos \Omega t \stackrel{\alpha \neq 0}{\Rightarrow} \ddot{x} + c\dot{x} \pm x \pm x^3 = k \cos \Omega t$$

Oscilador de Ueda

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = k \cos \Omega t \stackrel{\begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta>0 \end{matrix}}{\Rightarrow} \ddot{x} + c\dot{x} + x^3 = k \cos \Omega t$$

Oscilador de doble pozo

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = k \cos \Omega t \stackrel{\begin{matrix} \alpha<0 \\ \beta>0 \end{matrix}}{\Rightarrow} \ddot{x} + c\dot{x} - x + x^3 = k \cos \Omega t$$

NOTA: Para hacer simulaciones: [Página principal de EasyJava simulations](#)

Ejercicios

EJERCICIO 2

Utilizar la ventana de ODE ORBITS para examinar las órbitas del oscilador de Ueda, con $c=0.1$ y una selección de valores de $k \leq 10$.

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = k \cos \Omega t \quad \begin{matrix} (\alpha=0) \\ (\beta>0) \end{matrix} \Rightarrow \ddot{x} + c\dot{x} + x^3 = k \cos \Omega t$$

EJERCICIO 3

Utilizar la ventana de ODE ORBITS para examinar órbitas coexistentes del oscilador de doble pozo, con $k=0.25$ y $c=0.2$. Utilizar como condiciones iniciales $(1.4, 0.0)$ para una órbita, y $(-0.5, 0.0)$ para la otra.

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = k \cos \Omega t \quad \begin{matrix} (\alpha<0) \\ (\beta>0) \end{matrix} \Rightarrow \ddot{x} + c\dot{x} - x + x^3 = k \cos \Omega t$$

T6: Oscilaciones no lineales (II)

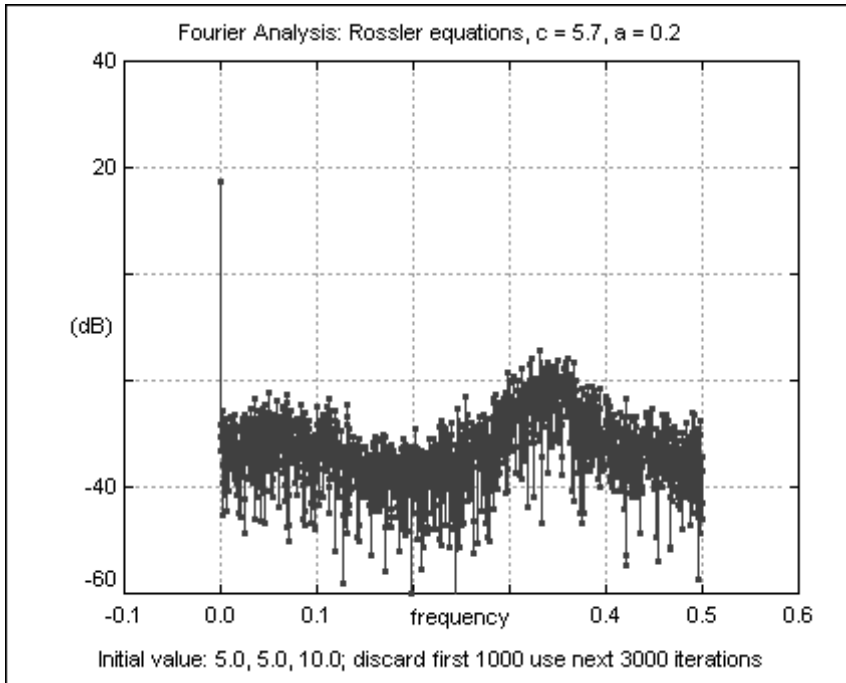
Prof.: Guiomar Ruiz López



*Introducción al Caos y a las Bifurcaciones
en sistemas dinámicos no lineales.*
E.U.I.T. Aeronáutica. U.P.M. Diciembre 2009.

Atractor de Rössler

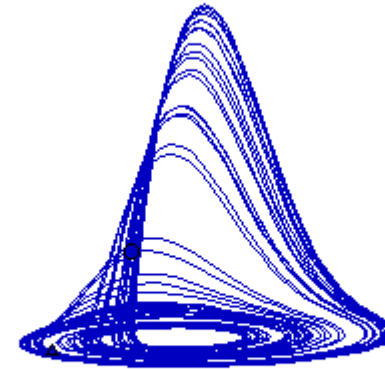
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = a + z(x - c) \end{cases}$$



Ver mediante Exponente Lyapunov > 0 (Poincaré)

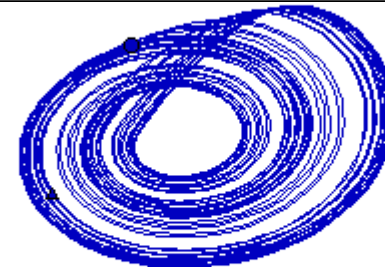
↓
Órbita caótica

Three dimensional orbits: Rossler equations



Determinista:
Órbitas no se cortan

c = 5.7, a = 0.2



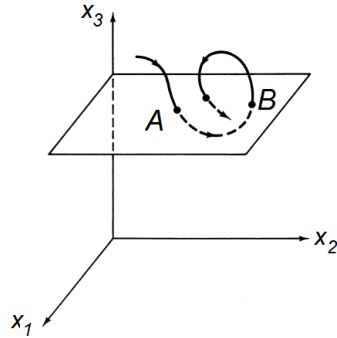
Giro en sentido antihorario
Alrededor del eje Z

c = 5.7, a = 0.2

Secs. Poincaré

Atractor de Rössler

Secciones de Poincaré

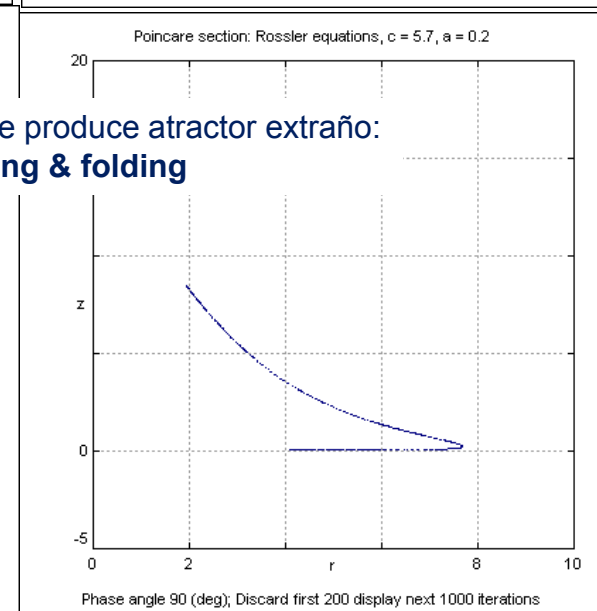
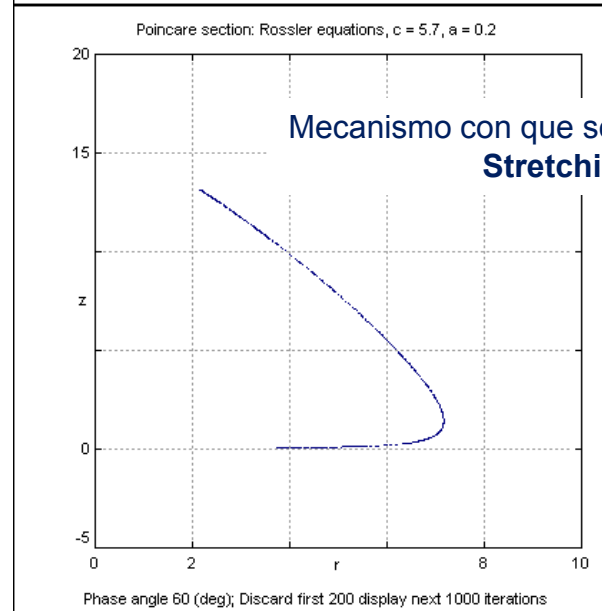
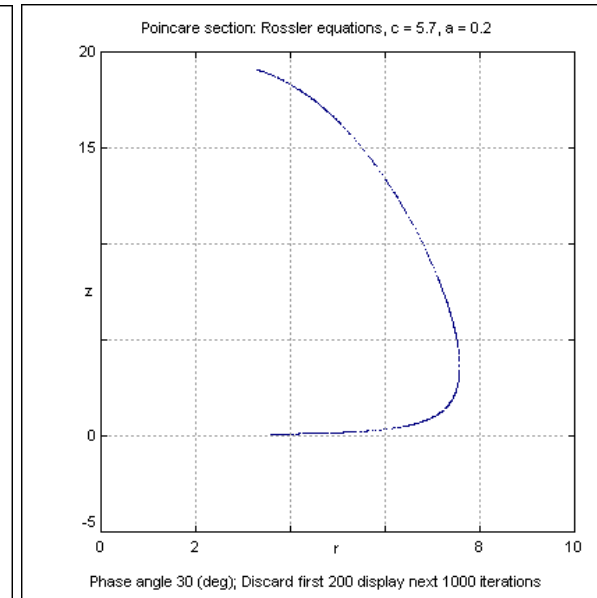
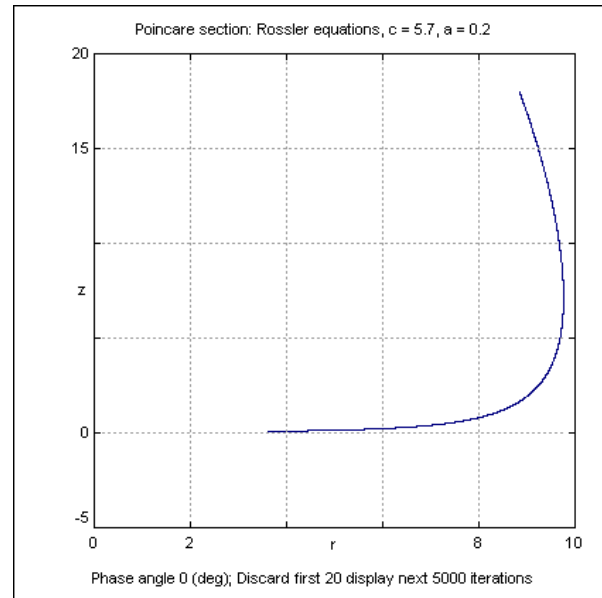


Órbitas individuales investigadas a partir del conjunto de puntos en los que cortan a una superficie transversa bidimensional.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = a + z(x - c) \end{cases}$$

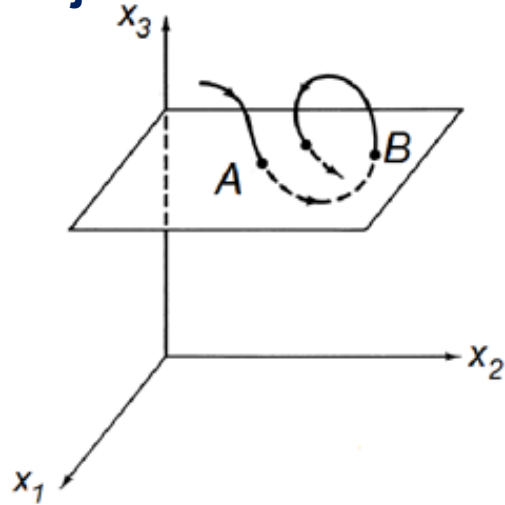


$$\begin{cases} r' = f(r, z) \\ z' = g(r, z) \end{cases}$$



Sección de Poincaré

Flujos:



$$\begin{cases} dx_1 / dt = F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ dx_2 / dt = F_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ dx_N / dt = F_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{cases}$$

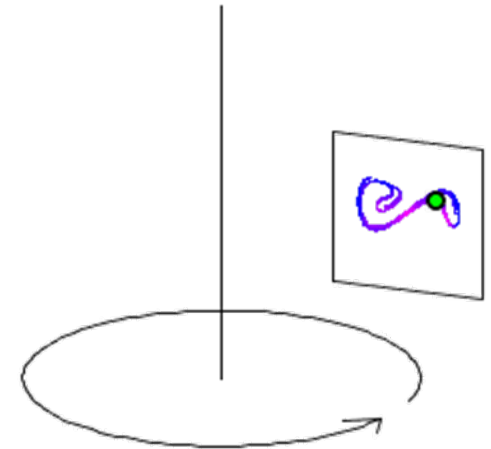
$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$$



Mapa asociado:

$$\vec{x}_{t+1} = M(\vec{x}_t),$$

Oscilador Duffing:



$$t_n = \frac{\phi_0 + 2\pi n}{\omega}, n=0,1,\dots$$

Sistema periódicamente forzado : No linealidad+ tres variables

→ ¿CAOS?

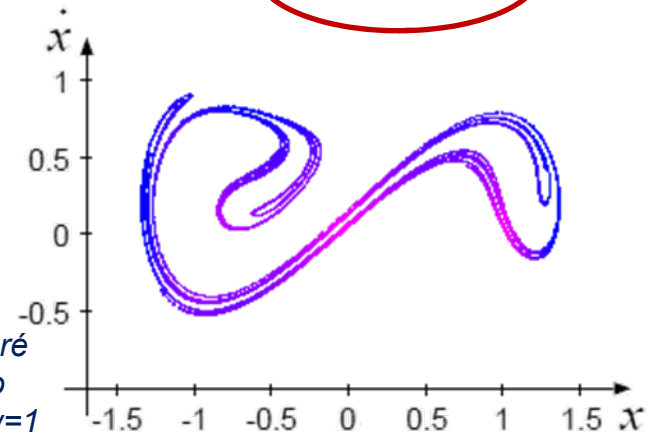
$$\ddot{x} + b\dot{x} + (x^2 - k)x = A \cos \omega t$$

Cambio de variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \phi (= \omega t) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -bx_2 - kx_1 - x_1^3 + A \cos x_3 \\ \dot{x}_3 = \omega \end{array} \right.$$

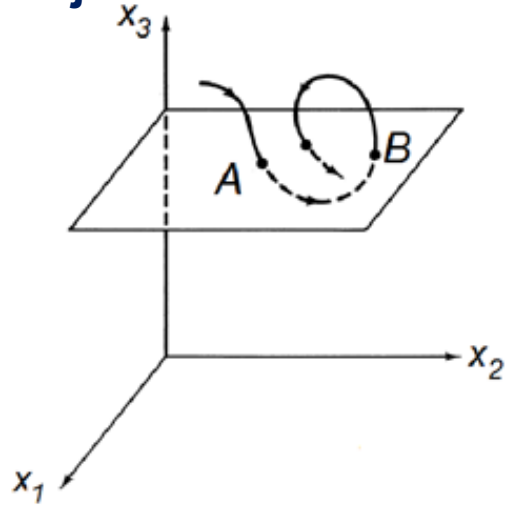


Sección de Poincaré
del atractor caótico
 $k=1, b=0.2, A=0.3, \omega=1$



Sección de Poincaré

Flujos:



$$\begin{cases} dx_1 / dt = F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ dx_2 / dt = F_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ dx_N / dt = F_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{cases}$$

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$$



$$\vec{x}_{t+1} = M(\vec{x}_t),$$

Mapa asociado:

Fase de sección de un sistema periódicamente forzado: $f(t) = A \cos wt$

$$t_0 \rightarrow \phi_0 = w t_0 \Rightarrow \phi_0 = w t_0 \bmod 2\pi, \quad \Leftrightarrow \quad (0 \leq \phi_0 \leq 2\pi)$$



Sección de Poincaré de la órbita de una ED: dada una fase de sección ϕ_0

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{t_1=t_0+2\pi/w} (x_1, y_1) \xrightarrow{t_2=t_1+2\pi/w} (x_2, y_2) \rightarrow \dots \rightarrow (x_{k-1}, y_{k-1}) \xrightarrow{t_k=t_{k-1}+2\pi/w} (x_k, y_k)$$

mapa bidimensional con información completa de la dinámica (la fase aparece como un parámetro)

Sección de Poincaré

Periodicidad

Órbita periódica (periodo del término de fuerza) ↔ Punto fijo S. Poincaré

$$x(t + 2\pi/\omega) = x(t); \quad y(t + 2\pi/\omega) = y(t)$$

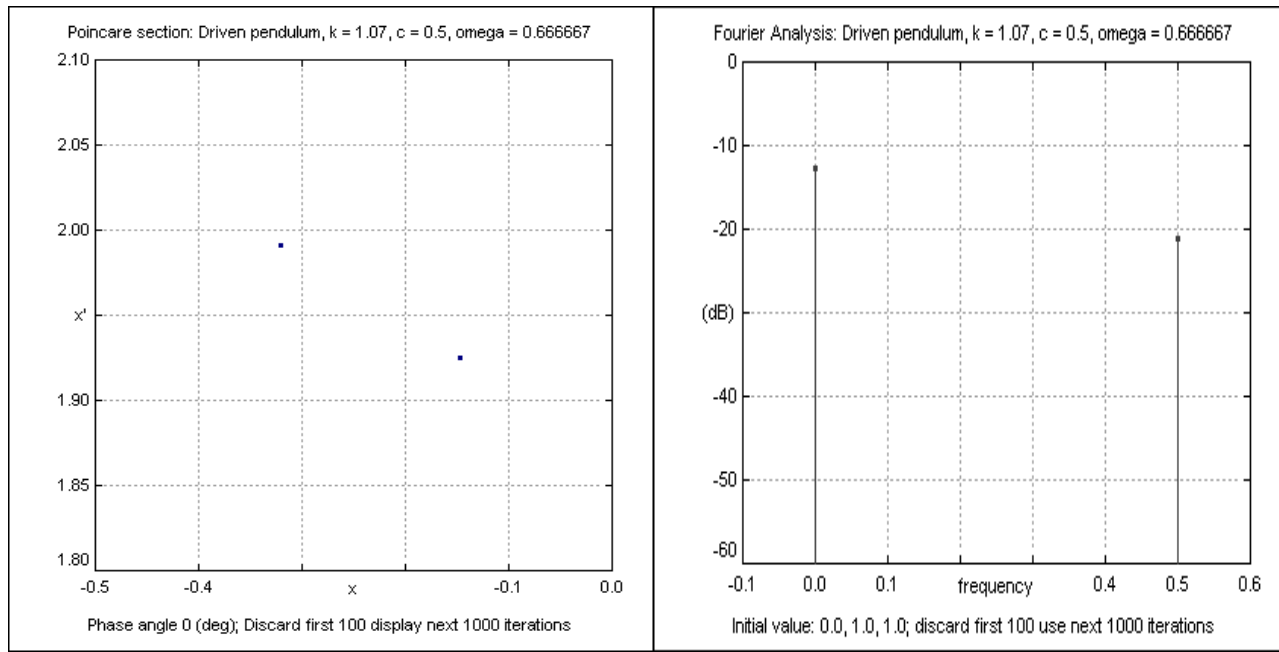
Órbita n-periódica de S. Poincaré ↔ Órbita periódica general:

$$x(t + 2\pi n/\omega) = x(t); \quad y(t + 2\pi n/\omega) = y(t)$$



La sección de Poincaré contiene información completa acerca de la periodicidad de la solución completa, para frecuencias hasta $\omega/2$

Ejemplo: $\ddot{x} + c\dot{x} + \sin x = k \cos \Omega t$, ($k=1.07$):



Sección de Poincaré

Periodicidad

Órbita periódica (periodo del término de fuerza) ↔ Punto fijo S. Poincaré

$$x(t + 2\pi/\omega) = x(t); \quad y(t + 2\pi/\omega) = y(t)$$

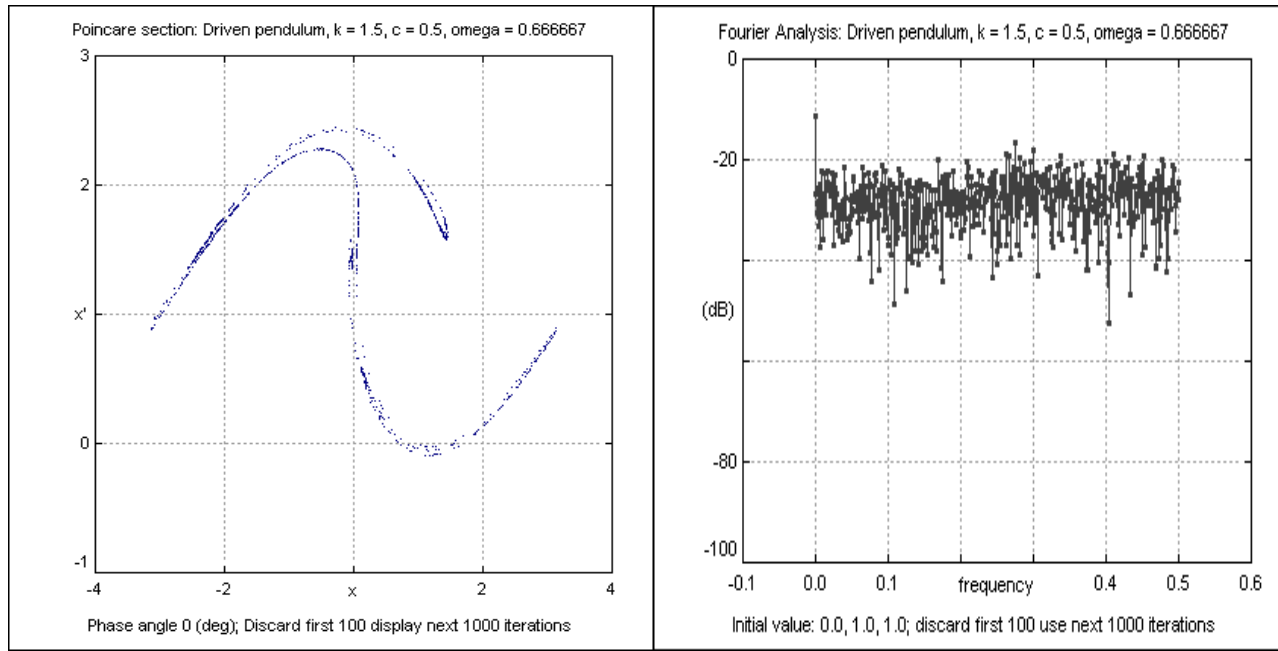
Órbita periódica (en general) ↔ Órbita n-periódica de S. Poincaré

$$x(t + 2\pi n/\omega) = x(t); \quad y(t + 2\pi n/\omega) = y(t)$$



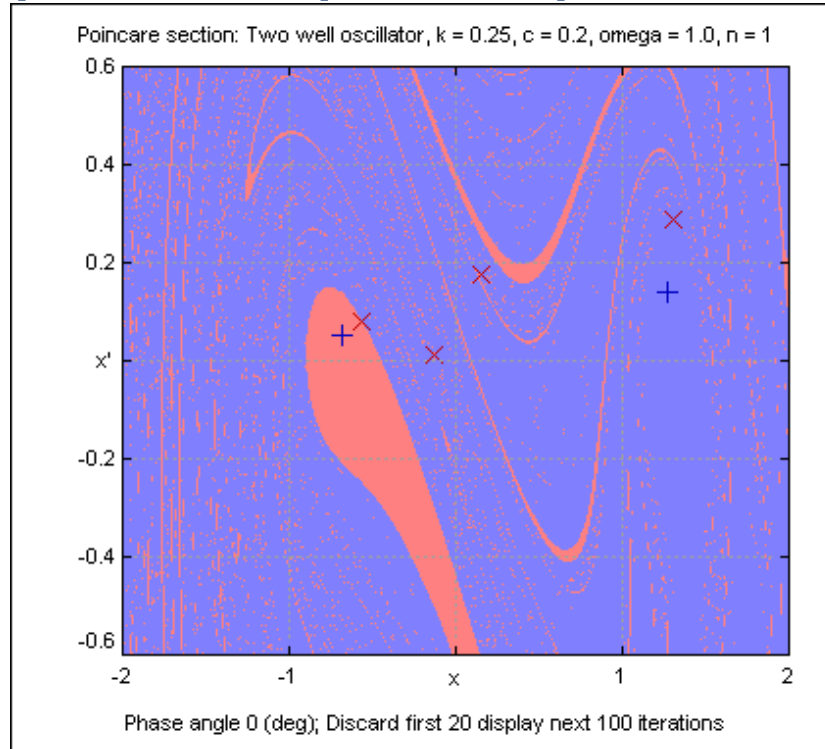
La sección de Poincaré contiene información completa acerca de la periodicidad de la solución completa, para frecuencias hasta $\omega/2$

Ejemplo: $\ddot{x} + c\dot{x} + \sin x = k \cos \Omega t$, ($k=1.5$):



Sección de Poincaré

Información proporcionada por el mapa de sección de Poincaré:



- 1) Puntos fijos (estables e inestables).
 - 2) Dos puntos estables: atractores 1-periódicos coexistentes.
 - 3) Cuatro puntos inestables: órbitas inestables 1-periódicas coexistentes.
 - 4) Cuencas de atracción de las órbitas estables.
 - 5) Fronteras de las cuencas son fractales.
 - 6) Puntos inestables se sitúan en las fronteras de las cuencas.
- ¿Caos? no periodicidad + exponente de Lyapunov > 0...**

Ejercicios

EJERCICIO 4

Considérese el péndulo forzado.

- Utilizando la ventana POINCARÉ SECTIONS, localizar las dos órbitas periódicas para $k=1.05$ en el péndulo forzado, utilizando las condiciones iniciales $(-2.2, 1.4)$, $(-0.3, 2.0)$
- Comprobar que las dos órbitas estables corresponden a dos puntos fijos estables del mapa. Observar también las dos órbitas inestables.
- Abrir una segunda ventana, con el mismo parámetro y condiciones iniciales, pero con fase de sección 180° . Comprobar que las posiciones de las órbitas (puntos fijos) son simétricas, esto es, cumplen:
$$x(t + \pi / \omega) = -x(t); \quad y(t + \pi / \omega) = -y(t)$$
- Visualizar las curvas nulas, para comprobar que también ellas disfrutan de la misma simetría.

EJERCICIO 5

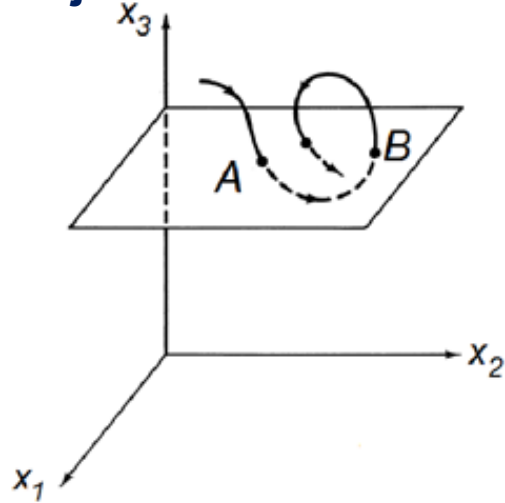
Investigar el oscilador de Ueda, con $c=0.1$, utilizando las herramientas disponibles en chaos for java.

Sugerencias:

- Comenzar con $k=2.5$ y observar que las dos órbitas que resultan de las condiciones iniciales $(1.54, 1.89)$ y $(1.77, -1.41)$.
- Observar el comportamiento de las curvas nulas y los puntos fijos al aumentar k , y clasificar la bifurcación que tiene lugar entre $k=2.2$ y $k=2.3$.
- Seguir las órbitas para valores mayores de k , y obtener evidencias de una cascada de desdoblamiento de periodo.
- Buscar una bifurcación tangente de periodo 3 en $k \approx 5.563$.

Sección de Poincaré y exponentes de Lyapunov

Flujos:



$$\begin{cases} dx_1 / dt = F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ dx_2 / dt = F_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ dx_N / dt = F_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{cases}$$

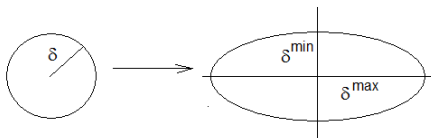
$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$$



Mapa asociado:

$$\vec{x}_{t+1} = M(\vec{x}_t),$$

Exponentes de Lyapunov:



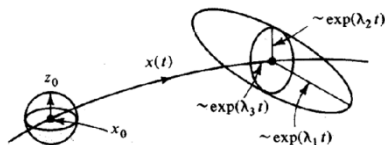
$$L_1(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} \left(\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \ln \left| \delta_k^{\max} / \delta_0 \right| \right)$$

$$L_2(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} \left(\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \ln \left| \delta_k^{\min} / \delta_0 \right| \right)$$

donde T_k es el tiempo transcurrido tras k iteraciones.
En nuestro caso: $T_k = \frac{2\pi k}{\Omega}$

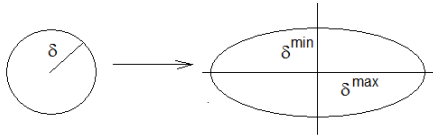
NOTA:

Para sistemas de 3 ecuaciones diferenciales, la contracción del elipsoide en un periodo es la misma que la de la elipse en la sección de Poincaré ($\lambda_3=0$) → plano de fases asociados a ejes no triviales.



Dimensión de Lyapunov

Exponentes de Lyapunov:



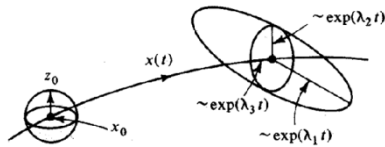
$$L_1(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} \left(\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \ln \left| \delta_k^{\max} / \delta_0 \right| \right)$$

$$L_2(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} \left(\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \ln \left| \delta_k^{\min} / \delta_0 \right| \right)$$

donde T_k es el tiempo transcurrido tras k iteraciones.
En nuestro caso: $T_k = \frac{2\pi k}{\Omega}$

NOTA:

Para sistemas de 3 ecuaciones diferenciales, la contracción del elipsoide en un periodo es la misma que la de la elipse en la sección de Poincaré ($\lambda_3=0$) \rightarrow plano de fases asociados a ejes no triviales.



$$d_L^{(3)} = d_L^{(2)} + 1 \quad \text{Recordar: } d_L^{(2)} = 1 - \lambda_1^{(2)} / \lambda_2^{(2)}, (\lambda_1^{(2)} > 0)$$

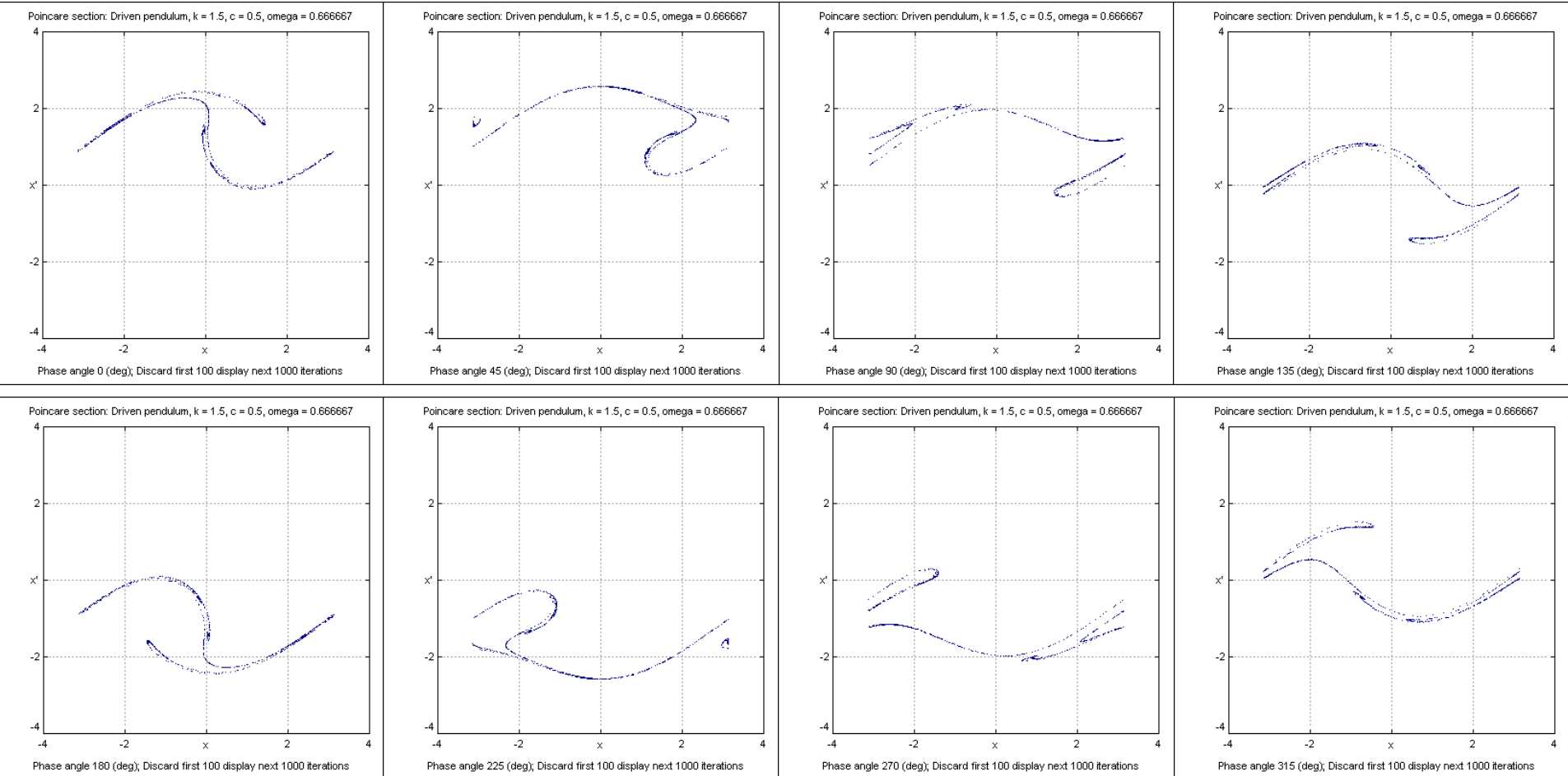
Hay dos posibilidades:

- 1) **Atractor periódico:** $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} < 0 \Rightarrow d_L^{(2)} = 0 \Rightarrow d_L^{(3)} = 1$
- 2) **Atractor extraño:** $\lambda_1^{(2)} > 0, \lambda_2^{(2)} < 0 \Rightarrow d_L^{(2)} = 1 - \lambda_1^{(2)} / \lambda_2^{(2)} > 1$

Atractor extraño para el péndulo forzado

Secuencia para el péndulo forzado ($c=0.5$, $k=1.5$):

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \sin x = k \cos \Omega t$$



EJERCICIO

Estimar los exponentes de Lyapunov del péndulo forzado, su dimensión de Lyapunov, y su espectro de Fourier para deducir que se trata de un atractor extraño

Péndulo forzado no lineal

Comportamiento dinámico en el péndulo

$$\ddot{x} + (1/q)\dot{x} + \sin x = g \cos \omega_D t$$

Rango	Comportamiento
$g < 1,085$	periódico
$1 < ,085g < 1,11$	caótico (ma)
$1,11 < g < 1,14$	periódico
$1,14 < g < 1,22$	caótico
$g \sim 1,22$	periódico
$1,22 < g < 1,26$	caótico
$1,26 < g < 1,28$	caótico(ma)
$1,28 < g < 1,475$	periódico
$1,475 < g < 1,485$	caótico(ma)
$1,485 < g < 1,493$	periódico
$1,493 < g < 1,495$	caótico
$1,495 < g < 1,497$	periódico
$g > 1,497$	caótico

Tabla 4.1. Comportamiento dinámico en el péndulo, con $q = 2$ y $\omega_D = 2/3$.
“ma” significa atractor caótico múltiple.