

Sesión 1: Introducción

Prof.: Guiomar Ruiz López



*Introducción al Caos y a las Bifurcaciones
en sistemas dinámicos no lineales.*
E.U.I.T. Aeronáutica. U.P.M. 6 de octubre 2009.

Desarrollo del curso

Objetivos:

- **Explorar relaciones** entre Sistemas dinámicos \leftrightarrow Caos y fractales
- **Desvelar la estructura** que existe en los sistemas no ordenados

Material:

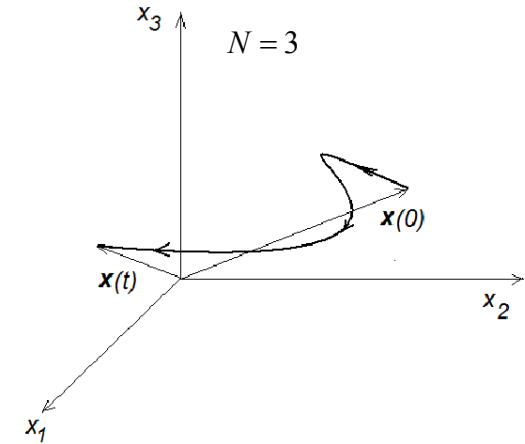
- Página web del Departamento de Matemáticas:
<http://matematicas.euita.upm.es/GRuiz/ICF/ICF.htm>
- *Chaos for java*:
<http://www.maths.anu.edu.au/~briand/chaos/software.html>

Modelos dinámicos deterministas

A) Flujos ($t \equiv$ tiempo es una variable continua):

$$\begin{cases} dx_1 / dt = F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ dx_2 / dt = F_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ dx_N / dt = F_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{cases}$$

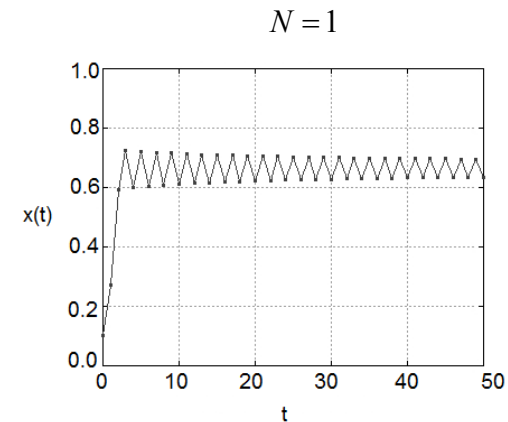
$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, $\vec{x}(t)$: vector N-dimensional



B) Mapas ($t \equiv$ tiempo es una variable discreta):

$$\vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \vec{x}_t \rightarrow \vec{x}_{t+1} \rightarrow \dots$$

$$\vec{x}_{t+1} = M(\vec{x}_t), \quad \vec{x}_t: \text{vector N-dimensional}$$



Definición: Mapas invertibles

Flujos lineales

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \Rightarrow \begin{cases} A \text{ diagble: } \vec{x} = \sum_{i=1}^N C_i \vec{v}_i e^{\lambda_i t} \\ A \text{ no diagble: } \vec{x} = \sum_{i=1}^N C_i (\vec{v}_i + t\vec{w}_i + \dots) e^{\lambda_i t} \end{cases}$$

N=2:

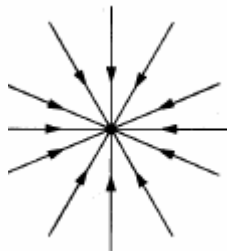
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0 :$



(a) node

$(0 < \lambda_2 < \lambda_1)$

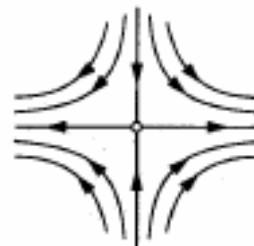
$\lambda_2 = \lambda_1 < 0 :$



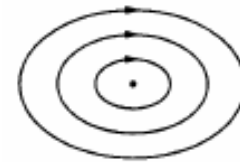
(b) degenerate node

$(0 < \lambda_2 = \lambda_1)$

$\lambda_2 < 0 < \lambda_1 :$



$\lambda_2 = \lambda_1^* \in \mathbb{C} :$



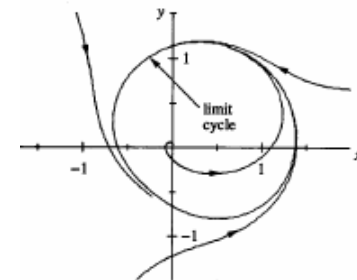
(a) center



(b) spiral

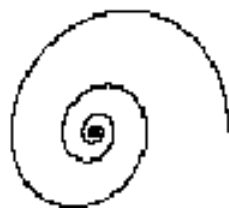
$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} \vec{b} = \vec{b} \Rightarrow \text{pto. eq.} \\ \vec{b} = \vec{b}(t) \Rightarrow \text{tray. eq.} \end{cases}$$

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0, \vec{b} = \vec{b}(\cos t, \sin t) :$

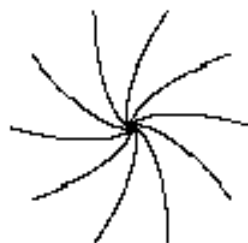


Types of Attractor

Fixed Point



Spiral

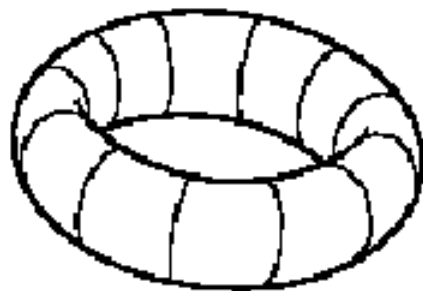


Radial

Limit Cycle



Torus

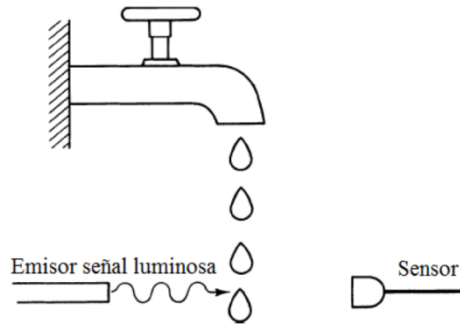


Strange Attractor



Flujos no lineales

1) Experimento de Shaw (1984)

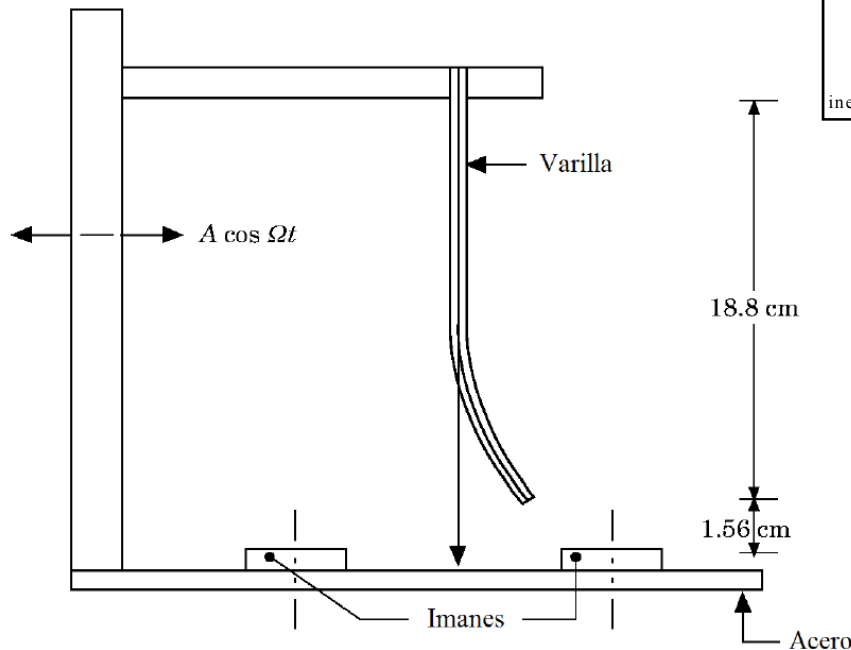


$$\Delta t_1 \rightarrow \Delta t_2 \rightarrow \Delta t_3 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta t_n \rightarrow \Delta t_{n+1} \rightarrow \dots$$

$$(\Delta t_j = t_j - t_{j-1})$$

- $\Delta t_1 = \Delta t_j$, $\forall j$
- $\Delta t_j = \Delta t_{j+2}$ $\forall j$
- $\Delta t_j \rightarrow \Delta t_{j+4}$ $\forall j$... régimen turbulento!

2) Experimento de Moon y Holmes (1979)



$$\underbrace{\frac{d^2 y}{dt^2}}_{\text{inercia de la varilla}} + \underbrace{v \frac{dy}{dt}}_{\text{efectos disipativos}} + \underbrace{(y^3 - y)}_{\text{fuerza elástica y magnética}} = \underbrace{A \sin t}_{\text{movimiento del aparato}}$$

A=0:



Sin efectos disipativos

($v=0$)

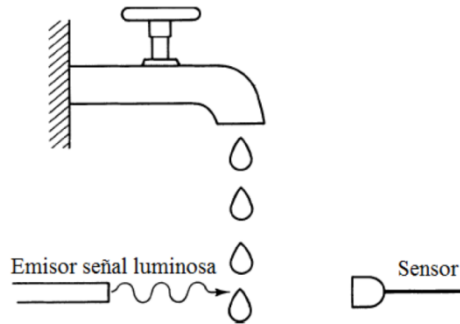


Con efectos disipativos

($v \neq 0$)

Flujos no lineales

1) Experimento de Shaw (1984)

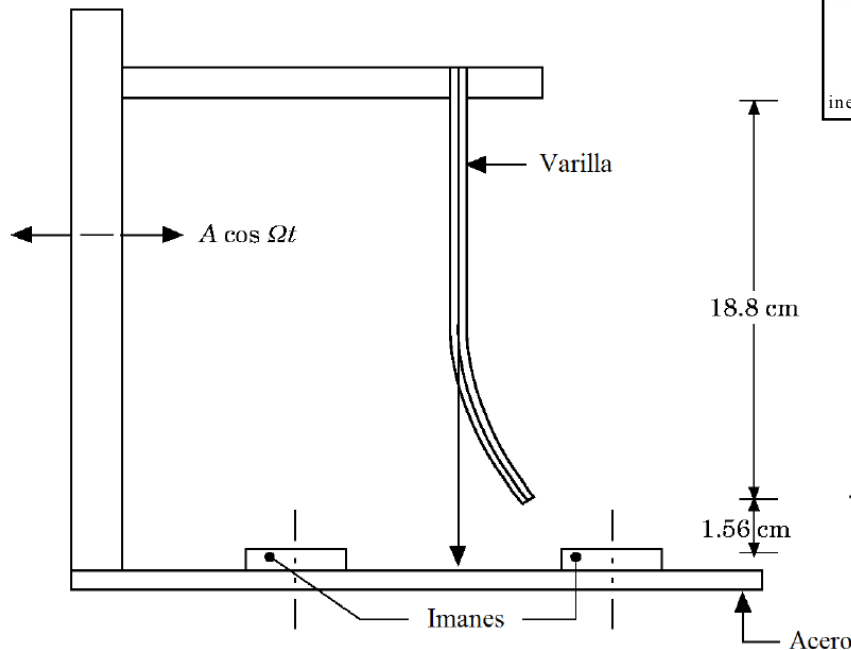


$$\Delta t_1 \rightarrow \Delta t_2 \rightarrow \Delta t_3 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta t_n \rightarrow \Delta t_{n+1} \rightarrow \dots$$

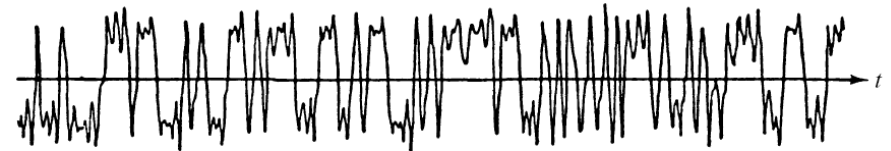
$$(\Delta t_j = t_j - t_{j-1})$$

- $\Delta t_1 = \Delta t_j$, $\forall j$
- $\Delta t_j = \Delta t_{j+2}$ $\forall j$
- $\Delta t_j \rightarrow \Delta t_{j+4}$ $\forall j$... régimen turbulento!

2) Experimento de Moon y Holmes (1979)



$$\underbrace{\frac{d^2 y}{dt^2}}_{\text{inercia de la varilla}} + \underbrace{\nu \frac{dy}{dt}}_{\text{efectos disipativos}} + \underbrace{(y^3 - y)}_{\text{fuerza elástica y magnética}} = \underbrace{A \sin t}_{\text{movimiento del aparato}}$$



(a) Resultado experimental



(b) Resultado numérico del modelo

Mapas no lineales

$$x_{t=0} \rightarrow x_{t=1} \rightarrow x_{t=2} \rightarrow \dots \rightarrow x_t \rightarrow x_{t+1} \rightarrow \dots$$

$$x_{t+1} = f(x_t, \lambda)$$

EJ.: Modelos de población

1.- Crecimiento ilimitado:

$$x_{\text{siguiente}} = \lambda x_{\text{inicial}}$$

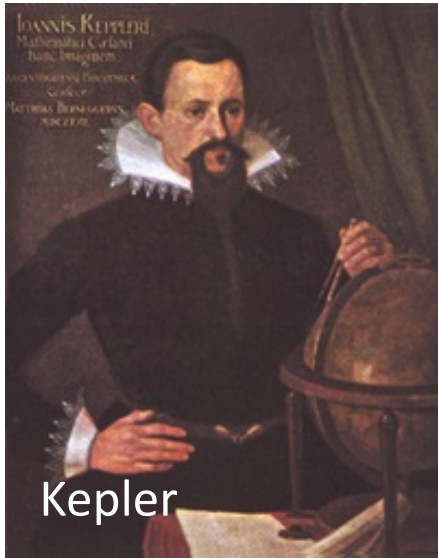
2.- Crecimiento de entorno limitado (Pierre François Verhulst, 1838)

- poblaciones grandes, disminuyen.
- poblaciones pequeñas, crecen rápidamente.

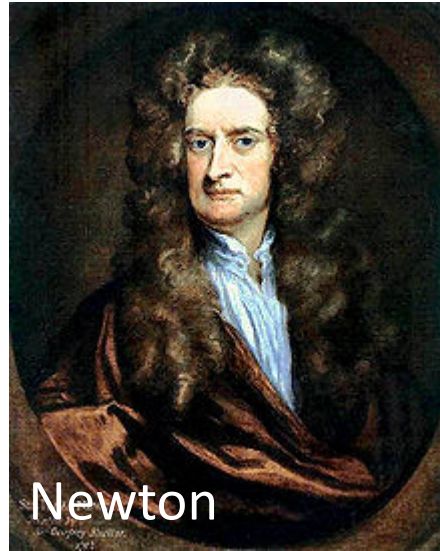
$$x_{t+1} = \lambda(x_t - x_t^2)$$

$$\text{donde } \lambda \equiv \text{tasa de crecimiento} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1.9 \\ \lambda = 2.9 \\ \lambda = 3.4 \\ \lambda = 3.99 \\ \lambda < 1 \end{cases}$$

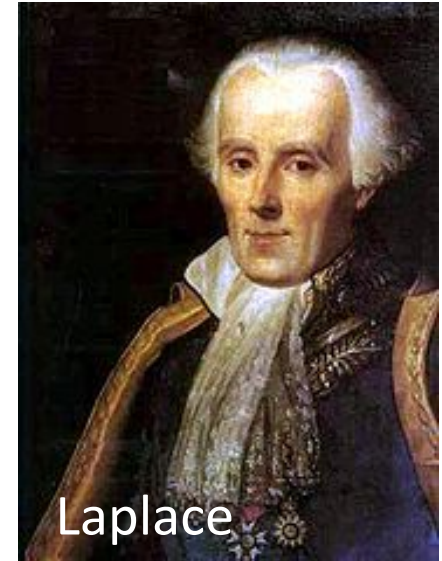
Ejercicio: ¿qué ocurre para $\lambda=3.5$, $\lambda=3.83$, $\lambda=4.0\dots$? ([Applet](#))



Kepler

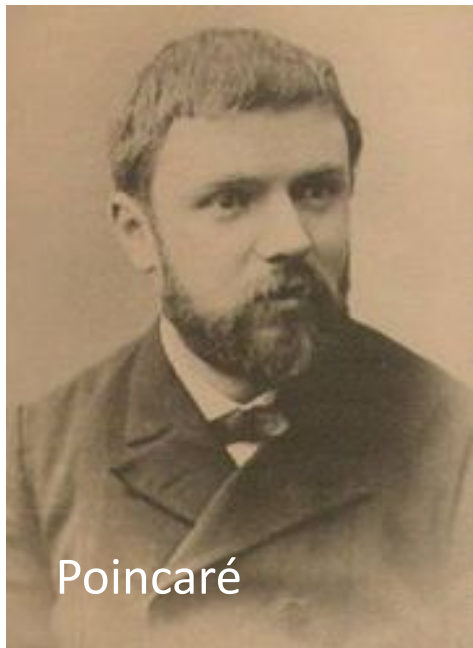


Newton

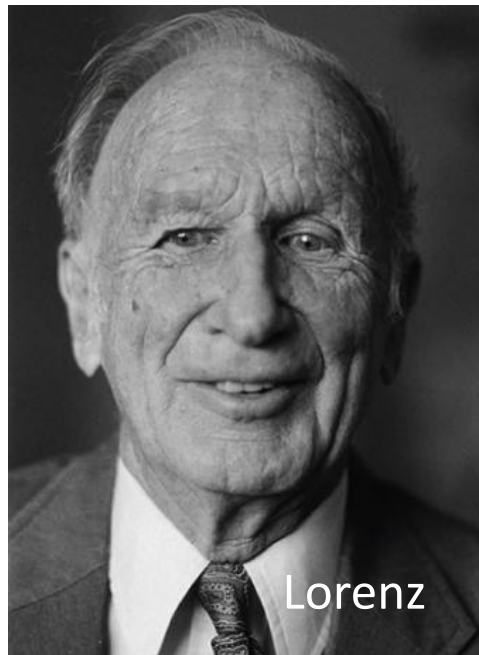


Laplace

Un poco de historia...



Poincaré



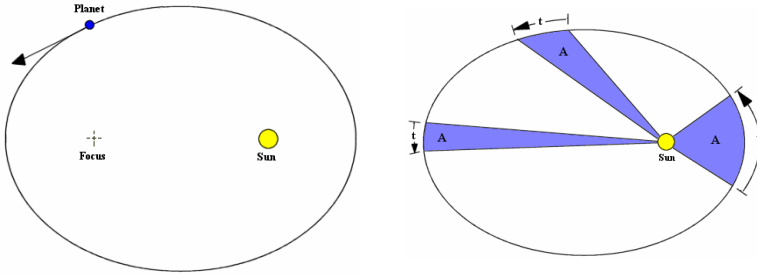
Lorenz

Kepler: 1571-1639
Newton: 1643-1727
Laplace: 1749-1827
Poincaré: 1854-1912
Lorenz: 1917-2008

Newton y la mecánica celeste

LEYES DE KEPLER:

1. **Primera Ley** (1609): Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos.
2. **Segunda Ley** (1609): El radio vector que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. **Tercera Ley** (1618): Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital (tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia media con el Sol.

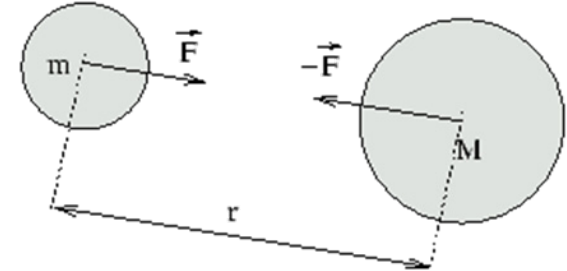


LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON:

La fuerza que ejerce una partícula puntual con masa m_1 sobre otra con masa m_2 es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \hat{u}_{12}$$

donde \hat{u}_{12} es el vector unitario que va de la partícula 1 a la 2, y donde G es la constante de gravitación universal: $G=6,674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.



PIERRE SIMON DE LAPLACE (achaca las deficiencias de las Leyes de Newton a una interacción resonante en ciclos de 900 años):

“Deberíamos ... considerar el presente estado del Universo como el efecto de su estado anterior, y la causa del que le seguirá. Supongamos ... una inteligencia que pudiera conocer todas las fuerzas que animan la naturaleza, y los estados, en un instante, de todos los objetos que la componen; ... para esa inteligencia nada podría ser incierto; y el futuro, como el pasado, sería presente a sus ojos”

Poincaré y el nacimiento del caos (1889)

PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS:

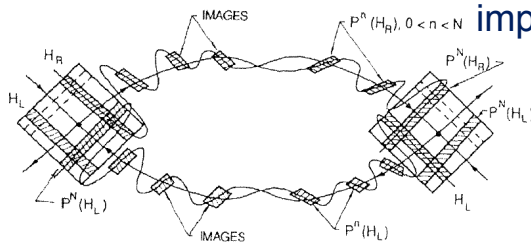
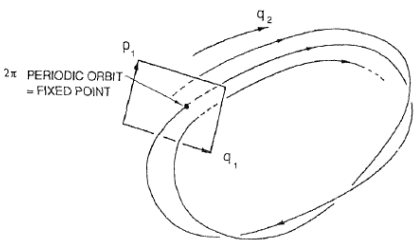
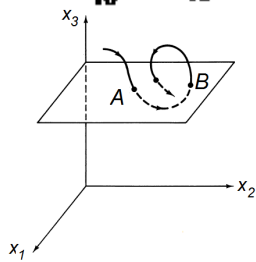
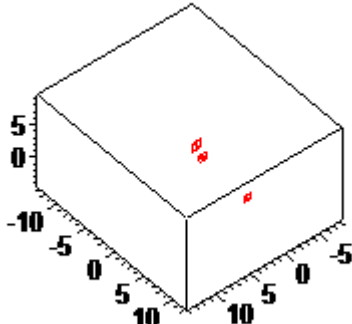


Fig. 9. Poincaré map for the perturbed pendulum.

- **Nuevo método:** a partir de las propiedades geométricas de las órbitas.
[E. Lorenz, *The essence of Chaos*](#)
[P. Holmes, *Poincaré, celestial mechanics, dynamical systems theory and chaos*, *Physics Reports*, **193**, 137-163 \(1990\) \(¿\[Suscripción UPM?\]\(#\)\)](#)
- **Secciones de Poincaré:** Órbitas individuales son investigadas a partir del conjunto de puntos en los que cortan a una superficie transversa bidimensional.
- Codificación de la dinámica original **de un flujo a un mapa**.
- **Órbitas periódicas son puntos** aislados del mapa.
- **Curvas en una superficie de sección** representan familias enteras de órbitas; cada punto de la curva representa una órbita.
- Ciertas familias de órbitas forman curvas que se intersectan a sí mismas infinitamente en las cercanías de un solo punto. La existencia de estas familias, implica la no integrabilidad del sistema.



Nacimiento del caos
Estudio numérico: Lorenz, 1963

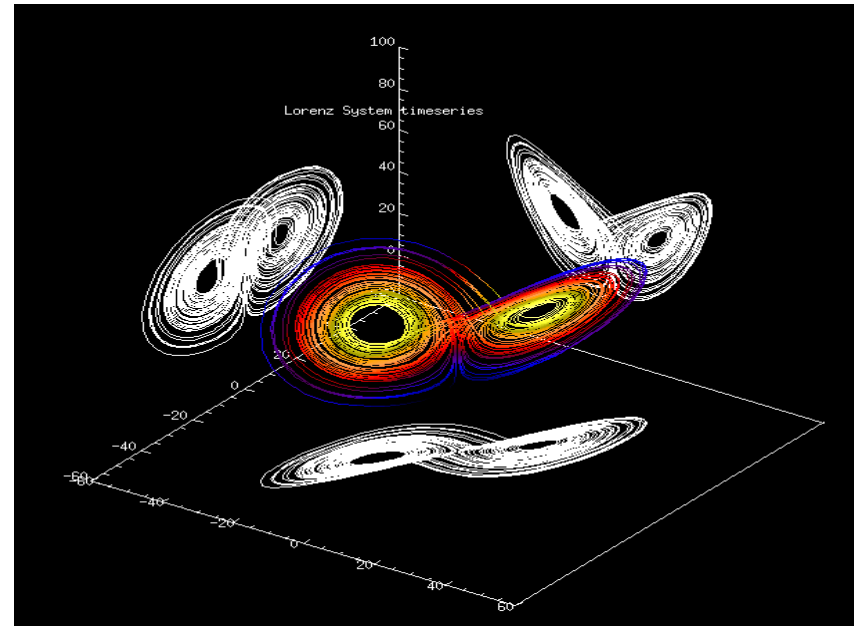
Lorentz: ¿el fin de la predicción del tiempo?(1963)

Aproximación a las ecuaciones Navier- Stokes:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma (y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

σ : n° de Prandtl (viscosidad/conductividad)
 r : n° Rayleigh (diferencia temperaturas base-altura)
 b : razón longitud/altura
 X : intensidad de rotación del anillo de convección
 Y : gradiente temperatura
 Z : desviación respecto equilibrio

[E. N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*](#)
J. Atm. Sci. **20**, 130-141 (1963)



En un sistema dinámico determinista y no lineal, encuentra caos ($\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$) :

- 1) Soluciones que presentan una oscilación no periódica: no basta n° finito frecuencias.
- 2) Gran sensibilidad a las condiciones iniciales: no hay predictibilidad aun a tiempos cortos.



Efecto mariposa:

“¿Puede el batir de las alas de una mariposa en Brasil dar lugar a un tornado en Texas?” (Eduard Lorenz)

- 3) Todas las condiciones iniciales son atraídas por regiones fractales: atractor extraño ($dim = 2.05$)

Sistemas simples y Comportamiento complejo

SISTEMAS DINÁMICOS DETERMINISTAS:

A) Comportamiento regular

B) Comportamiento caótico (\neq Estocástico):

- Dependencia sensible a las condiciones iniciales (efecto *mariposa*).
- Mezcla de los estados del sistema a escalas decrecientes.

¿A qué fenómenos puede dar lugar el caos?

¿Qué mecanismos lo desencadenan?

“The development of dynamical systems theory in general, and Lorenz's contribution and May's review in Nature in particular, triggered a change in perception: that a large number of complicated equations were not necessary... for solutions to be chaotic or turbulent-like. Dynamical systems theory has been driven to the forefront of many fields of science with an impressive number and variety of applications”

Holton y May , *The nature of chaos*, cap. V (T. Mullin)

Ejercicios

EJERCICIO 1

Encontrar los siguientes artículos y situarlos en el contexto del que hemos hablado:

a) Robert M. May, "[Simple Mathematical models with very complicated dynamics](#)"
Nature, **261**, 459-469 (1976).

a) Edward N. Lorenz, "[Deterministic Nonperiodic Flow](#)"
Journal of Atmospheric Sciences, **20**, 130-141 (1963).

EJERCICIO 2

Encontrar, utilizando la ventana de Iterate(1D) en Chaos for java, diferentes comportamientos para el mapa seno:

$$x_{t+1} = q \sin \pi x_t \quad (0 \leq q \leq 1)$$

En concreto, encontrar algunos valores de q para los que la población:

- a) Alcanza un valor estable
- b) Evoluciona según ciclos periódicos
- c) Evoluciona de forma aparentemente desordenada.

Prestar atención al comportamiento para $q=0.938$, y observar qué es lo que ocurre antes de que se establezca el comportamiento regular, y qué es lo que ocurre cuando de nuevo el comportamiento se vuelve desordenado.